Jena Research Papers in Business and Economics

Das Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion und seine Anwendung bei nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen

Katja Poser, Maik Wagner

15/2007

Jenaer Schriften zur Wirtschaftswissenschaft

Working and Discussion Paper Series
School of Economics and Business Administration
Friedrich-Schiller-University Jena

ISSN 1864-3108

Publisher:

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Carl-Zeiß-Str. 3, D-07743 Jena

www.jbe.uni-jena.de

Editor:

Prof. Dr. Hans-Walter Lorenz
h.w.lorenz@wiwi.uni-jena.de

Prof. Dr. Armin Scholl
armin.scholl@wiwi.uni-jena.de

www.jbe.uni-jena.de

Das Newsvendor Modell mit nicht-linearer Kostenfunktion und seine Anwendung bei nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen

Katja Poser, Maik Wagner

Friedrich-Schiller-Universität Jena, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Lehrstuhl für Wirtschafts- und Sozialstatistik, Carl-Zeiß-Straße 3, D-07743 Jena, Germany

K.Poser@wiwi.uni-jena.de, Maik.Wagner@wiwi.uni-jena.de

Abstract:

Rückversicherung kann als Überwälzung von versicherungstechnischem Risiko vom Erst- auf den Rückversicherer definiert werden, kurz gesagt: "Rückversicherung ist Versicherung von Versicherungen". Einen entscheidenden Aspekt bei der Ausgestaltung von Rückversicherungsverträgen stellt die Bestimmung von Selbstbehalten und Deckungsgrenzen dar. Der vorliegende Beitrag gibt zunächst einen Überblick über die Ziele und Formen der Rückversicherung. Anschließend wird das Newsvendor Modell, ein Modell zur Bestellmengenoptimierung, kurz vorgestellt. Ziel dieses Beitrages ist es, diesen Ansatz aus dem Supply Chain Management zur Modellierung von Deckungsgrenzen sowie Selbstbehalten von nichtproportionalen Rückversicherungsverträgen anzuwenden.

Key words: Newsvendor, Risiko, Rückversicherung, Entscheidungstheorie

1 Einleitung

Ziel dieses Beitrages ist es, eine Möglichkeit aufzuzeigen, wie Selbstbehalte und Deckungsgrenzen von Versicherungsverträgen mit Hilfe eines Modells aus dem Supply Chain Management modelliert werden können.
Wir werden zunächst in Abschnitt 2 den Begriff der Rückversicherung definieren und erläutern. Im Weiteren werden wir auf die Zielsetzungen, die ein Erstversicherer mit Hilfe von Rückversicherung verfolgt, näher eingehen. Dazu wird ein Überblick über verschiedene Arten der Rückversicherung und deren Ausgestaltungsmöglichkeiten gegeben. Ein entscheidender Aspekt bei der Strukturierung von Rückversicherungsverträgen ist die Bestimmung des Deckungsumfangs.
In Abschnitt 3 wird dazu zunächst das Newsvendor Modell, ein klassisches Modell zu Bestellmengenoptimierung, mit einigen Erweiterungen vorgestellt. Anschließend wird dieses Modell auf den Rückversicherungsfall angewendet, um optimale Deckungsgrenzen bei nichtproportionalen Verträgen zu bestimmen.

2 Rückversicherung

2.1 Definition

Rückversicherung bezeichnet die Überwälzung eines Teils der von einem Erstversicherer (Zedent) gegenüber Versicherungsnehmern aufgrund von Versicherungsverträgen oder von gesetzlichen Bestimmungen übernommenen Gefahren oder Risiken auf einen zweiten, mit dem Versicherungsnehmer nicht direkt in Verbindung stehenden Versicherungsträger, den Rückversicherer (Zessionär).[1]

2.2 Ziele der Rückversicherung

Das Hauptziel der Rückversicherungsnahme stellt die Reduktion des versicherungstechnischen Risikos für den Erstversicherer dar. Er schützt sich vor extremen Realisationen des Schadenverlaufs in Form von Kumulen und Katastrophen, die die Existenz des Unternehmens bedrohen.[2]
Außerdem soll der Geschäftsverlauf des Erstversicherers mit Hilfe von Rückversicherung stabilisiert werden. Man spricht auch von Homogenisierung des Portfolios. Dabei wird ein Teil der aus dem Erstversicherungsgeschäft übernommenen ungewissen Schadenkosten durch fixe Rückversicherungskosten ersetzt.[3]
In den meisten Ländern existieren Vorschriften, die eine Mindesteigenkapitalausstattung für Versicherungsunternehmen in Abhängigkeit von der Risikolage fordern. Durch die Reduktion des versicherungstechnischen Risikos trägt Rückversicherung somit auch zu einer Minderung des Eigenmittelbedarfs und damit einer verbesserten Solvabilität bei.[4]

[1] Eine Übersicht über verschiedene Definitionen des Begriffes Rückversicherung findet sich bspw. bei Grossmann (1990), S. 1 ff. oder bei Liebwein (2000), S. 3 f.
[2] Vgl. Liebwein (2000a), S. 51.
[3] Vgl. Mack (1997), S. 323.
[4] Vgl. Dienst (1988), S. 8 f.

2.3 Arten der Rückversicherung

Rückversicherungsverträge werden entsprechend der Art ihrer Risikoteilungswirkung zwischen Erst- und Rückversicherer in proportional und nichtproportional unterschieden.[5]

Im Rahmen der proportionalen Rückversicherung werden Originalbeiträge und Schäden nach einem vertraglich festgelegten Verhältnis (proportional) zwischen Erst- und Rückversicherer aufgeteilt. Als Bemessungsgrundlage dient dabei i. d. R. die Versicherungssumme des Originalrisikos oder der Possible Maximum Loss (PML). Je nach Vertragsart ist dieses Verhältnis für alle versicherungstechnischen Einheiten gleich (Quotenvertrag) oder es variiert von Fall zu Fall (Summenexzedentenvertrag).[6]

Nichtproportionale Rückversicherung zeichnet sich dadurch aus, dass nur die Schäden innerhalb eines Portfolios betrachtet werden. D. h. das Portfolio wird als Produzent von Schäden betrachtet, ohne darauf zu achten, aus welchen konkreten versicherungstechnischen Einheiten die Schäden resultieren.
Ein nichtproportionaler Rückversicherungsvertrag regelt, wer welchen Teil des eingetretenen Schadens S zu tragen hat. Der Erstversicherer übernimmt dabei maximal Schäden in Höhe seiner Priorität $prio$ (Selbstbehalt). Der Rückversicherer trägt den die Priorität übersteigenden Teil, den sog. Exzess- oder Überschaden. Die Haftung des Rückversicherers ist wiederum durch den Plafond y beschränkt. Der Teil des Schadens, der den Plafond übersteigt, fällt zurück in den Selbstbehalt des Erstversicherers. Die Wirkungsweise eines solchen Vertrages ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Die Schadenzahlung RVS

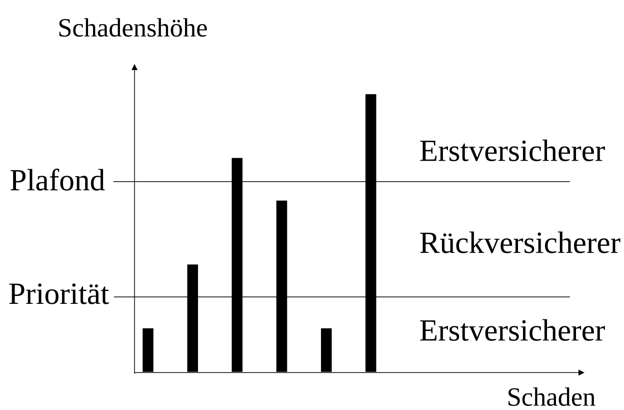

Fig. 1: Darstellung der Priorität und des Plafonds bei einem nicht-proportionalen Rückversicherungsvertrag und der Übernahme des Schadens durch den Erst- bzw. durch den Rückversicherer

des Rückversicherers an den Erstversicherer kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$RVS(S, prio, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } S < prio \\ S - prio & \text{für } prio \leq S < y \\ y - prio & \text{für } S \geq prio \end{cases} .$$

[5]Eine Übersicht über Rückversicherungsformen findet sich bspw. bei Farny (1995), S. 487 ff.
[6]Vgl. Pfeiffer (1986), S. 45 f.

Die Definition eines Schadens bzw. Schadenereignisses ist für die konkrete Ausgestaltung und Wirkung eines nichtproportionalen Rückversicherungsvertrages entscheidend. Es werden Einzelschaden, Kumulschaden und Jahresgesamtschaden unterschieden. Dementsprechend existieren Einzel- (Working Excess of Loss / WXL per Risk), Kumul- (Working Excess of Loss per Event / Catastrophe Excess of Loss / WXL/E bzw. CatXL) und Jahresüberschadenexzedent (Stop Loss / SL).
Im Weiteren werden wir uns mit der Gestaltung und Optimierung von nichtproportionalen Rückversicherungsverträgen beschäftigen.

2.4 Gestaltung von Rückversicherungsverträgen

Um die oben genannten Ziele zu erreichen und gleichzeitig sein ökonomisches Ergebnis zu maximieren, stehen dem Erstversicherer eine Reihe von Elementen zur Gestaltung seiner Rückversicherungsdeckung zur Verfügung. Dabei ist in erster Linie die Kombination verschiedener Vertragstypen zu nennen, z. B. ein WXL/R, welcher die Spitzenrisiken abdeckt, in Kombination mit einem WXL/E, der den Selbstbehalt des Erstversicherers im Falle eines hohen Kumulschadens schützt.
Für die konkrete Ausgestaltung einzelner Verträge sind schadenabhängige Preiskomponenten wie bspw. Staffelentgelte, Gewinnanteilsvereinbarungen und Überschadenselbstbeteiligungen von Bedeutung.[7]
Weitere Gestaltungselemente sind Depotvereinbarungen, Indexklauseln, zusätzliche Serviceleistungen des Rückversicherers sowie Bonitätsanforderungen an den Rückversicherer. Einen entscheidenden Gesichtpunkt beim Abschluss eines Rückversicherungsvertrages stellen Haftungskomponenten dar. Dazu zählen u. a. die geografische Abgrenzung des Haftungsbereiches, die Laufzeit, die Behandlung von Beitrags- und Schadenportefeuilles bei Vertragsende und nicht zuletzt die Deckungsgrenzen des Vertrages.[8]

2.5 Zielfunktion des Erstversicherers

Das Ziel des Erstversicherers ist es, seinen Unternehmensgewinn zu maximieren. Dieser setzt sich zusammen aus den Originalprämien Pr und den Originalschäden S aus dem Erstversicherungsgeschäft sowie den allgemeinen Betriebskosten K, den Kosten für Rückversicherung (Rückversicherungprämien RVP) und Einnahmen aus in Anspruch genommener Rückversicherungsdeckung (Rückversicherungsschadenzahlungen, RVS). Formal lässt sich die Funktion folgendermaßen aufstellen:

$$G = Pr - S - K - RVP + RVS.$$

Schließt der Erstversicherer einen nichtproportionalen Rückversicherungsvertrag ab, so kann die allgemeine Gewinnfunktion folgendermaßen konkretisiert werden:

$$G(prio, y, S) = Pr - S - K - RVP(prio, y) + RVS(prio, y, S).$$

Für den Rückversicherungsschaden gilt:

$$RVS(prio, y, S) = \begin{cases} 0 & \text{für } S < prio \\ S - prio & \text{für } prio \leq S < y \\ y - prio & \text{für } S \geq prio \end{cases} .$$

[7]Zu Formen der Rückversicherungsprovision vgl. Gerathewohl (1976), Band I, S. 273 ff.
[8]Vgl. Liebwein (2000a), S. 135 ff.

Geht man davon aus, dass der Erstversicherer keinen Selbstbehalt tragen muss, d. h. die Priorität Null beträgt, hängt RVS nur noch vom Originalschaden S und dem Plafond y ab:

$$RVS(y,S) = \begin{cases} S & \text{für } S \leq y \\ y & \text{für } S > y \end{cases} = min(y,S).$$

Somit lautet die Gewinnfunktion des Erstversicherers:

$$G(y,S) = Pr - S - K - RVP(y) + min(y,S). \tag{1}$$

Erhält der Erstversicherer eine unendlich hohe Deckung, d. h. Plafond $y = \infty$, dann hängt RVS nur noch vom Originalschaden S und der Priorität $prio$ ab:

$$RVS(prio,S) = \begin{cases} S - prio & \text{für } S \geq prio \\ 0 & \text{für } S < prio \end{cases} = S - min(prio,S).$$

Damit ist die Gewinnfunktion des Erstversicherers:

$$G(prio,S) = Pr - K - RVP(prio) - min(prio,S). \tag{2}$$

3 Das Newsvendor Modell

3.1 Der klassische Newsvendor Ansatz

Im klassischen Modell möchte ein Händler ein bestimmtes Produkt zum Preis p verkaufen. Das Produkt hat die Eigenschaft, dass es nur innerhalb eines bestimmten Zeitraumes bzw. einer bestimmten Saison abgesetzt werden kann.
Der Händler muss die Menge y dieses Produktes vor dem tatsächlichen Verkaufszeitraum bestellen, er kennt die tatsächliche Nachfrage X zum Bestellzeitpunkt also nicht. Das heißt X ist eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ und der dazugehörigen Dichte $f(x)$. Da die Nachfrage nicht negativ sein kann, gilt: $f(x) = 0$ für alle $x < 0$.
Eine spätere Nachbestellung ist ausgeschlossen. Alle Produkte, die nicht abgesetzt werden können, werden entweder nach der Verkaufsperiode entsorgt oder müssen für einen geringeren Preis z als den Einkaufspreis c verkauft bzw. können an den Lieferanten zurückgegeben werden.
Da die Nachfrage nach dem Produkt beim Zeitpunkt der Bestellung unsicher ist, steht der Händler vor dem Problem, die Bestellmenge so zu wählen, dass sich Nachfrage und Bestellmenge möglichst genau entsprechen. Ist die Bestellmenge zu gering, gehen ihm potentielle Gewinne durch einen höheren Absatz verloren. Ist die Bestellmenge zu hoch, entstehen Kosten für die Entsorgung/ den Abverkauf der Restmenge.
Der Umsatz des Newsvendors hängt von der Bestellmenge y sowie der Nachfrage X ab:

$$Umsatz = \begin{cases} p \cdot y & \text{für } y \leq X \\ p \cdot X & \text{für } y > X \end{cases} = p \cdot min(y,X).$$

Die Einkaufskosten ergeben sich aus den Stückkosten c sowie der Bestellmenge y:

$$Einkaufskosten = c \cdot y.$$

Der alternative Umsatz aus der Restmenge beträgt:

$$Alternativer\ Umsatz \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq X \\ z \cdot (y - X) & \text{für } y > X \end{cases} = z \cdot max(0, y - X).$$

Damit erhält man für den Gewinn G des Newsvendors:

$$G(y, X) \quad = \quad \begin{cases} p \cdot y - c \cdot y & \text{für } y \leq X \\ p \cdot X - c \cdot y + z(y - X) & \text{für } y > X \end{cases}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} G(y, X) \quad &= \quad \underbrace{p \cdot min(y, X)}_{\text{Umsatz}} - \underbrace{c \cdot y}_{\text{Gesamtkosten}} + \underbrace{z \cdot max(0; y - X)}_{\text{Alternativer Umsatz aus der Restmenge}} \\ &= \quad (p - c) \cdot y - (p - z) \cdot max(0; y - X). \end{aligned}$$

Der risikoneutrale Newsvendor im Grundmodell wird die Bestellmenge y so wählen, dass er seinen erwarteten Gewinn $E(G)$ maximiert. Es gilt:

$$E(G(y, X)) = (p - c)y - (p - z) \int_0^y (y - x) f(x) dx$$

Damit ergibt sich die optimale Bestellmenge y^* aus:

$$F(y^*) = \frac{p - c}{p - z}.$$

Für invertierbare Verteilungsfunktionen F^{-1} beträgt die optimale Bestellmenge des risikoneutralen Newsvendors:[9]

$$y^* = F^{-1}\left(\frac{p - c}{p - z}\right).$$

3.2 Der Newsvendor Ansatz mit Risikopräferenzen

Ziel eines nicht risikoneutralen Newsvendors ist nicht die Maximierung des erwarteten Gewinns. Er bewertet für sich hohe Gewinne und niedrige Gewinne (bzw. Verluste) unterschiedlich. Eine Variante, diese unterschiedlichen Wertungen zu berücksichtigen, stellt folgender Ansatz dar:[10]

$$\max_y [\lambda E(G(y, X|G(y, X) \leq x_\alpha) + (1 - \lambda) E(G(y, X)|G(y, X) \geq x_\alpha)], \tag{3}$$

wobei $\lambda \in [0, 1]$ und $\alpha \in [0, 1]$.

Diese Zielfunktion stellt eine Konvexkombination der bedingten Erwartungswerte von hohen (Gewinn $\geq$ Quantil x_α) und niedrigen (Gewinn $\leq$ Quantil x_α) Gewinnen dar. Dabei kann λ als Pessimismusparameter betrachtet werden. Je höher λ gewählt wird, desto höher gewichtet der Entscheider niedrige Gewinne bzw. Verluste. Ein risikoneutraler Entscheider wählt $\alpha = \lambda$, ein risikoaverser Entscheider wählt $\alpha < \lambda$ und ein risikofreudiger

[9] Vgl. Cachon/ Terwiesch (2006), Kap. 9.4. oder Chopra/ Meindl (2004), Kap. 12.
[10] Vgl. Jammernegg/ Kischka (2005), S. 6 oder Jammernegg/ Kischka (2007), S. 99.

Entscheider $\alpha > \lambda$.
Die optimale Bestellmenge beträgt in Abhängigkeit von den Risikoparametern α und λ:[11]

$$y^*(\alpha,\lambda) = \begin{cases} F^{-1}\left(\frac{p-c}{p-z} + \frac{\alpha-\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{c-z}{p-z}\right) & \text{für } \lambda \leq \frac{p-c}{p-z} \\ F^{-1}\left(\frac{p-c}{p-z} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right) & \text{für } \lambda \geq \frac{p-c}{p-z} \end{cases}.$$

3.3 Der Newsvendor Ansatz mit Risikopräferenzen und nicht-linearer Kostenfunktion

Bisher sind wir von einer linearen Kostenfunktion ausgegangen. Das heißt es lagen konstante Stückkosten vor. Der Newsvendor hat unabhängig von der Bestellmenge y einen konstanten Preis c pro Zeitung gezahlt.

Im Folgenden werden wir diese Annahme aufgeben und das Newsvendor-Problem mit der allgemeinen Kostenfunktion k(y) betrachten.
In der Gewinnfunktion

$$\begin{aligned} G(y,X) &= \underbrace{p \cdot min(y,X)}_{\text{Umsatz}} - \underbrace{c \cdot y}_{\text{Gesamtkosten}} + \underbrace{z \cdot max(0; y-X)}_{\text{Alternativer Umsatz aus der Restmenge}} \\ &= (p-c) \cdot y - (p-z) \cdot max(0; y-X). \end{aligned}$$

werden die Gesamtkosten $c \cdot y$ durch $k(y)$ ersetzt:

$$G(y,X) = \underbrace{p \cdot min(y,X)}_{\text{Umsatz}} - \underbrace{k(y)}_{\text{Gesamtkosten}} + \underbrace{z \cdot max(0; y-X)}_{\text{Alternativer Umsatz aus der Restmenge}} \tag{4}$$

Wird die oben beschriebene Zielfunktion (3) nach Jammernegg/ Kischka (2007) angewendet, erhält man folgende optimale Bestellmenge in impliziter Form:[12]

$$y*(\alpha,\lambda) = \begin{cases} F^{-1}\left(\frac{p-k'(y*)}{p-z} + \frac{\alpha-\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{k'(y*)-z}{p-z}\right) & \text{für } \lambda \leq \frac{p-k'(y*)}{p-z} \\ F^{-1}\left(\frac{p-k'(y*)}{p-z} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right) & \text{für } \lambda \geq \frac{p-k'(y*)}{p-z}. \end{cases}$$

4 Anwendung des Newsvendor-Ansatzes zur Bestimmung von Deckungsgrenzen

Im folgenden Abschnitt wird das Newsvendor-Modell auf das Optimierungsproblem des Erstversicherers bei der Gestaltung seiner Rückversicherungsdeckung übertragen.

Wie bereits erläutert, hat der Erstversicherer das Ziel, seinen Gewinn zu maximieren. Im Sinne dieses Zieles steht er vor der Aufgabe, seinen Rückversicherungsschutz zu gestalten, d. h. Plafond und Priorität eines nichtproportionalen Rückversicherungsvertrages

[11] Vgl. Jammernegg/ Kischka (2007), S. 101.

[12] Da die nichtlineare Kostenfunktion von der Nachfrage X unabhängig ist, entsprechen die bedingten Erwartungswerte der nicht-linearen Kostenfunktion der Kostenfunktion selbst. Im Rahmen der Maximierung der Zielfunktion wird die Kostenfunktion $k(y)$ differenziert. Damit entspricht $k'(y)$ dem Einkaufspreis c im linearen Fall.

zu wählen.

Der Rückversicherer muss über den Umfang des Versicherungsschutzes vor Beginn der Versicherungsperiode entscheiden. Das heißt der Schaden S ist zu diesem Zeitpunkt unsicher. Bekannt ist allerdings die Verteilungsfunktion $F(S)$. Es liegt also eine analoge Situation zum Newsvendor vor, welcher die Nachfrage X nach Zeitungen zum Bestellzeitpunkt nicht kennt, sondern nur deren Verteilung $F(X)$.

4.1 Optimierung des Plafonds

Zunächst beschränken wir uns auf die Bestimmung des optimalen Plafonds und gehen davon aus, dass die Priorität Null beträgt, d. h. der Erstversicherer hat keinen Selbstbehalt zu tragen. Es existieren in diesem Fall zwei Szenarien:

1. Der Schaden S übersteigt den Plafond y nicht und damit übernimmt der Rückversicherer den Schaden komplett.

2. Der Schaden S überschreitet den Plafond. Damit haftet der Rückversicherer nur in Höhe des Plafonds. Der Teil des Schadens, der den Plafond übersteigt, muss vom Erstversicherer getragen werden.

Die Schadenzahlung des Rückversicherers an den Erstversicherer kann also wie folgt geschrieben werden:

$$RVS(y, S) = \begin{cases} y & \text{für } y \leq S \\ S & \text{für } y > S \end{cases} = min(y, S).$$

RVS kann auch als "Umsatz aus Rückversicherung" bezeichnet werden und entspricht dem Umsatz des Newsvendors im klassischen Newsvendor Modell mit $p = 1$, da der Erstversicherer genau einen Euro pro Euro rückversicherten Schaden erhält.

Analog zu den Einkaufskosten $k(y)$ des Newsvendor Modells mit nicht-linearer Kostenfunktion muss der Erstversicherer Kosten für die Rückversicherung in Form einer Rückversicherungsprämie RVP zahlen. Der Preis pro Euro Deckung (Rate on Line) sinkt mit steigendem Plafond.

Die Möglichkeit, nicht benötigte Rückversicherungsdeckung zurückzugeben oder weiterzuverkaufen besteht nicht. Das heißt im Gegensatz zum Newsvendor Modell gilt: der Rückgabepreis $z = 0$.

Der Gewinn G des Erstversicherers setzt sich folgendermaßen zusammen:[13]

$$\begin{aligned} G(y, S) &= Umsatz - Kosten \\ &= Pr + RVS(y, S) - (S + RVP(y)) \\ &= Pr - S - RVP(y) + min(y, S) \end{aligned}$$

mit Pr als Originalprämien aus dem Erstversicherungsgeschäft.

[13] Dabei wurden sonstige Kosten vernachlässigt, da diese für das Optimierungsproblem nicht relevant sind.

4.1.1 Optimierung des Plafonds bei Risikoneutralität

Der risikoneutrale Erstversicherer wird den Plafond so wählen, dass sein erwarteter Gewinn maximiert wird. Es gilt für den erwarteten Gewinn:

$$\begin{aligned} E(G(y,S)) &= Pr - E(S) - RVP(y) + E(min(y,S) \\ &= Pr - E(S) - RVP(y) + \int_0^y sf(s)ds + y\int_y^\infty f(s)ds \\ &= Pr - E(S) - RVP(y) + \int_0^y sf(s)ds + y(1+F(y)). \end{aligned}$$

Durch Differentiation und Nullsetzen des ersten Differentials des erwarteten Gewinns folgt:

$$\frac{dE(G(y,S))}{dy} = -RVP'(y) + 1 - F(y) = 0.$$

Der optimale Plafond ist somit implizit gegeben durch:

$$y^* = F^{-1}(1 - RVP'(y^*)),$$

wobei F^{-1} die inverse Schadenverteilungsfunktion bezeichnet.

Eine in der Praxis übliche spezielle Rückversicherungsprämie setzt sich beispielsweise aus dem erwarteten rückversicherten Schaden und einem Gewinnaufschlag (Loading) γ zusammen:[14]

$$RVP(y) = (1+\gamma)E(min(y,S))$$

mit $\gamma \in [0;1]$. Setzt man die erste Ableitung nach y dieser speziellen Rückversicherungsprämie $RVP'(y) = (1+\gamma)(1-F(y))$[15] in die Formel für den optimalen Plafond ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} y^* &= F^{-1}(1-(1+\gamma)(1-F(y^*))) \\ F(y^*) &= 1-(1+\gamma)(1-F(y^*)) \\ 0 &= \gamma(1-F(y^*)) \\ F(y^*) &= 1. \end{aligned}$$

Das heißt im Optimum wählt der Erstversicherer den Plafond in Höhe des größtmöglichen Schadens. Nun ist anhand der 2. Ableitung zu prüfen, ob es sich hierbei um ein Maximum oder ein Minimum handelt. Für das zweite Differential gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2E(G(y,S))}{dy^2} &= -RVP''(y) - f(y) \\ &= (1+\gamma)f(y) - f(y) \\ &= \gamma f(y) > 0. \end{aligned}$$

Da die 2. Ableitung für alle positiven Werte von $f(y)$ positiv ist, handelt es sich um ein Minimum. Das Maximum der Gewinnfunktion muss am Rand angenommen werden. Somit

[14] Vgl. Mack (1997), S. 26 ff.

[15] Vgl. Wagner (2007).

gilt $y^* = F^{-1}(0)$, da F als Verteilungsfunktion nur Werte zwischen Null und Eins annehmen kann. Der risikoneutrale Erstversicherer rückversichert sich also überhaupt nicht, da das Maximum bei einem Schaden von Null angenommen wird.

Er müsste als Rückversicherungsprämie den Erwartungswert plus einen Zuschlag γ bezahlen, um den unsicheren Schaden gegen den sicheren Betrag RVP auszutauschen. Ein risikoneutraler Entscheider ist indifferent zwischen einer Lotterie und deren sicheren Erwartungswert. Er ist daher nicht bereit, eine Risikoprämie in Form eines Zuschlages zu zahlen.[16]

4.1.2 Optimierung des Plafonds bei Risikoaversion oder -freude

Im folgenden Abschnitt wird untersucht, wie sich Risikoeinstellungen auf die Rückversicherungsnahme auswirken. Dazu wird der Ansatz nach Jammernegg/ Kischka (2007) wie in Abschnitt 3.2 verwendet.

$$\max_y [\lambda E(G(y,S|G(y,S) \leq s_\alpha) + (1-\lambda)E(G(y,S)|G(y,S) \geq s_\alpha)]$$

Dabei sind $\alpha, \lambda \in [0,1]$ und s_α das α -Quantil der Schadenverteilung F(s).
Für die Gewinnfunktion des Newsvendors mit nicht-linearer Kostenfunktion gilt laut Formel (4)

$$G(y,X) = p \cdot min(y,X) - k(y) + z \cdot max(0; y-X).$$

Dagegen gilt für die Gewinnfunktion des Erstversicherers bei einer Priorität von Null nach Formel (1)

$$G(y,S) = Pr - S - K - RVP(y) + min(y,S).$$

Da die Prämie Pr, der Schaden S sowie die Kosten K unabhängig vom zu optimierenden Plafond y sind, ist die Lösung des Optimierungsproblems mit der Gewinnfunktion (1) des Erstversicherers und der Gewinnfunktion

$$G(y,S) = RVP(y) + min(y,S).$$

identisch. Man sieht, dass für $p = 1$, $z = 0$ und k(y)=RVP(y) die Gewinnfunktion (4) mit der Gewinnfunktion des Erstversicherers $G(y,S) = RVP(y) + min(y,S)$ übereinstimmt.

Somit erhält man den optimalen Plafond durch Einsetzen von $p = 1$, $z = 0$ und $k'(y) = RVP'(y)$ in die optimale Lösung des Newsvendor Problems mit Risikopräferenzen und nicht-linearer Kostenfunktion. Es gilt folgende implizite Form:

$$y^*(\alpha,\lambda) = \begin{cases} F^{-1}\left(\frac{1-RVP'(y^*)}{1-0} + \frac{\alpha-\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{RVP'(y^*)-0}{1-0}\right) & \text{für } \lambda \leq \frac{1-RVP'(y^*)}{1-0} \\ F^{-1}\left(\frac{1-RVP'(y^*)}{1-0} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right) & \text{für } \lambda > \frac{1-RVP'(y^*)}{1-0} \end{cases}$$

und durch Zusammenfassung folgt[17]

$$y^*(\alpha,\lambda) = \begin{cases} F^{-1}\left(1 - \frac{1-\alpha}{1-\lambda} RVP'(y^*)\right) & \text{für } \lambda \leq 1 - RVP'(y^*) \\ F^{-1}\left(\frac{\alpha}{\lambda}(1 - RVP'(y^*))\right) & \text{für } \lambda > 1 - RVP'(y^*) \end{cases}.$$

[16] Zu Risikoprämie bzw. -abschlag sowie Sicherheitsäquivalent, vgl. bspw. Laux (2003), S. 216 ff.
[17] Vgl. Wagner (2007).

4.2 Optimierung der Priorität

Nun soll die optimale Priorität eines nichtproportionalen Rückversicherungsvertrages bestimmt werden. Dabei gehen wir davon aus, dass der Plafond den größtmöglichen Schaden abdeckt. Dass heißt es kann kein Schaden den Plafond überschreiten und dadurch zurück in den Selbstbehalt des Erstversicherers fallen. Es existieren zwei Szenarien:

1. Der Schaden S übersteigt die Priorität $prio$ nicht und damit trägt der Erstversicherer den Schaden komplett.

2. Der Schaden S überschreitet die Priorität. Damit haftet der Erstversicherer in Höhe der Priorität. Der die Priorität übersteigende Teil des Schadens, wird vom Rückversicherer getragen.

Die Schadenzahlung des Rückversicherers an den Erstversicherer kann also wie folgt geschrieben werden:

$$RVS(prio, S) = \begin{cases} S - prio & \text{für } S > prio \\ 0 & \text{für } S \leq prio \end{cases} = max(S - prio, 0)$$

Der Gewinn G des Erstversicherers setzt sich in diesem Fall folgendermaßen zusammen:[18]

$$\begin{aligned} G(prio, S) &= Pr - RVP(prio) - S + \begin{cases} S - prio & \text{für } S > prio \\ 0 & \text{für } S \leq prio \end{cases} \\ &= Pr - RVP(prio) + \begin{cases} -prio & \text{für } S > prio \\ -S & \text{für } S \leq prio \end{cases} \\ &= Pr - RVP(prio) - min(prio, S). \end{aligned}$$

Ziel eines risikoneutralen Erstversicherers ist es nun wiederum, seinen erwarteten Gewinn $E(G)$ zu maximieren. Wir werden im Folgenden direkt zum allgemeinen Fall mit Risikopräferenzen übergehen, da die risikoneutrale Situation als Spezialfall dessen betrachtet werden kann.

Nach dem bereits aus Abschnitt 3.2 bekannten Ansatz maximiert der Erstversicherer folgende Zielfunktion für $\alpha, \lambda \in [0, 1]$:

$$\max_{prio}[\lambda E(G(prio, S|G(prio, S) \leq s_\alpha) + (1 - \lambda)E(G(prio, S)|G(prio, S) \geq s_\alpha)].$$

Für die Gewinnfunktion des Newsvendor Modells mit nicht-linearer Kostenfunktion gilt laut Formel (4):

$$G(y, X) = p \cdot min(y, X) - k(y) + z \cdot max(0; y - X).$$

Dagegen gilt für die Gewinnfunktion laut (2) bei einem Plafond von unendlich:

$$G(prio, S) = Pr - RVP(prio) - min(prio, S).$$

[18] Dabei wurden wiederum sonstige Kosten vernachlässigt.

Da die Prämie Pr unabhängig von der zu optimierenden Priorität $prio$ ist, ist die Lösung des Optimierungsproblems mit der Gewinnfunktion (2) des Erstversicherers und der Gewinnfunktion:

$$G(prio, S) = -RVP(prio) - min(prio, S)$$

identisch. Man sieht, dass für $p = -1$, $z = 0$ und k(y)=RVP(y) die Gewinnfunktion (4) mit der Gewinnfunktion des Erstversicherers

$$G(prio, S) = -RVP(prio) - min(prio, S)$$

übereinstimmt.

Somit erhält man die optimale Priorität in impliziter Form durch Einsetzen von $p = -1$, $z = 0$ und k'(y)=RVP'(prio) in die optimale Lösung des Newsvendor Problems mit Risikopräferenzen und nicht-linearer Kostenfunktion:[19]

$$prio^*(\alpha, \lambda) = \begin{cases} F^{-1}\left(1 + \frac{1-\alpha}{1-\lambda} RVP'(prio^*)\right) & \text{für } \lambda \leq 1 + RVP'(prio^*) \\ F^{-1}\left(\frac{\alpha}{\lambda}(1 + RVP'(prio^*))\right) & \text{für } \lambda > 1 + RVP'(prio^*) \end{cases} .$$

4.3 Optimaler Plafond und optimale Priorität bei einer speziellen Rückversicherungsprämie

Im Weiteren verwenden wir die spezielle Rückversicherungsprämie $RVP = (1+\gamma)E(RVS)$ aus Abschnitt 4.1.1 in Abhängigkeit von dem Plafond y bzw. der Priorität $prio$:

$$RVP(y) = (1 + \gamma)E(min(S, y))$$

beziehungsweise

$$RVP(prio) = (1 + \gamma)E(max(S - prio, 0))$$

mit $\gamma \in [0; 1]$. Durch Einsetzen der 1. Ableitungen der Rückversicherungsprämien:[20]

$$RVP'(y) = (1 + \gamma)E(1 - F(y))$$

beziehungsweise

$$RVP'(prio) = (1 + \gamma)E(-1 + F(prio))$$

in die optimalen Lösungen für den Plafond und Priorität erhält man:[21]

$$y^*(\alpha, \lambda) = \begin{cases} F^{-1}(1) & \text{für } 1 + \gamma < \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \\ F^{-1}(0) & \text{für } 1 + \gamma > \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \end{cases}$$

beziehungsweise

$$prio^*(\alpha, \lambda) = \begin{cases} F^{-1}\left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha(1+\gamma)-\lambda}\right) & \text{für } 1 + \gamma < \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \\ F^{-1}(1) & \text{für } 1 + \gamma > \frac{1-\lambda}{1-\alpha} \end{cases} .$$

[19] Vgl. Wagner (2007).
[20] Vgl. Wagner (2007).
[21] Vgl. Wagner (2007).

Für die Bedingung $1+\gamma > \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ ist der optimale Plafond $y^*(\alpha,\lambda) = F^{-1}(0)$ und die optimale Priorität $prio^*(\alpha,\lambda) = F^{-1}(1)$. Dies bedeutet, dass der optimale Plafond bei einem Schaden von Null gewählt wird und somit keine Rückversicherung gekauft wird. Die optimale Priorität wird bei dem größtmöglichen Schaden gewählt, d. h. auch in diesem Fall wird die Rückversichung nicht in Betracht gezogen. Des Weiteren muss gelten, dass die Priorität kleiner als der Plafond ist. Dies liegt in diesem Fall nicht vor.

Für die Bedingung $1+\gamma < \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ ist der optimale Plafond $y^*(\alpha,\lambda) = F^{-1}(1)$ und die optimale Priorität:

$$prio^*(\alpha,\lambda) = F^{-1}\left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha(1+\gamma)-\lambda}\right).$$

Der optimale Plafond wird in der Höhe des größtmöglichen Schadens gewählt. Da $0 < \frac{\alpha\gamma}{\alpha(1+\gamma)-\lambda} < 1$ für die Bedingung $1+\gamma < \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ gilt, ist die Priorität immer kleiner als der Plafond. Somit wird Rückversicherung in Anspruch genommen und es liegt Risikoaversion vor. Man kann sehen, dass die Priorität mit Risikoaversionszunahme ab der Bedingung $1+\gamma < \frac{1-\lambda}{1-\alpha}$ sinkt. Dies soll Abbildung 2 verdeutlichen.

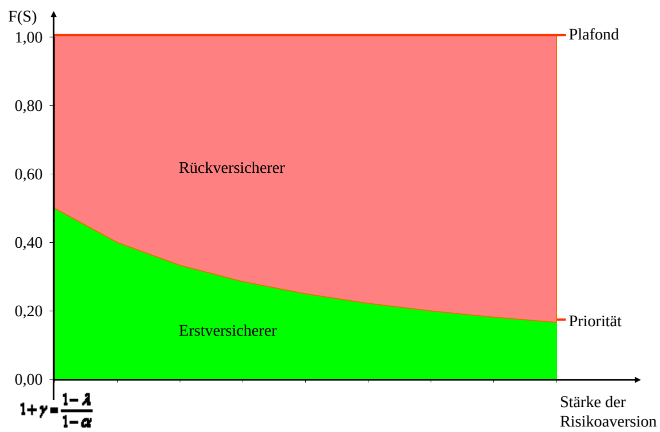

Fig. 2: optimaler Plafond und optimale Priorität bei Risikoaversion

Den Risikopräferenzraum stellt die Abbildung 3 dar. Die Fläche oberhalb der Linie $\gamma = 0$

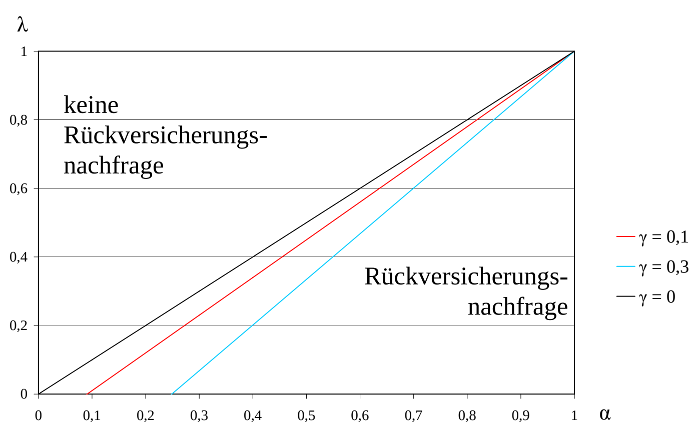

Fig. 3: Risikopräferenzraum

bilden alle α-λ-Kombinationen für Risikofreude, da in diesem Fall $\alpha < \lambda$ gilt. Unterhalb dieser speziellen Linie ($\gamma = 0$ bzw. $\alpha = \lambda$) liegt Risikoaversion vor und die Linie selbst stellt Risikoneutralität dar.

In der Grafik wird verdeutlicht, dass oberhalb von der Gerade $\gamma = 0,1$ bzw. von der Gerade $\gamma = 0,3$ keine Rückversicherung und unterhalb der jeweiligen Gerade die Rückversicherung gekauft wird.

Je risikoaverser ein Erstversicherer ist, desto größer ist seine Bereitschaft eine Risikoprämie in Form eines Gewinnaufschlags an den Rückversicherer zu zahlen. Das heißt es muss ein bestimmtes Maß an Risikoaversion erreicht sein, damit der Gewinnaufschlag "überwunden" wird und der Erstversicherer Rückversicherungsschutz kauft.

5 Ausblick

Durch die bereitgestellten Lösungen ist es möglich, bei Kenntnis der Schadenverteilung und der Deckungsgrenzen die Risikoeinstellung des Erstversicherers zu bestimmen. Des Weiteren können dann bei Kenntnis der Risikoeinstellung des Erstversicherers und Vorlage einer anderen Schadenverteilung die optimalen Deckungsgrenzen berechnet werden.

Literatur

[1] *Cachon, G., Terwiesch, C. (2006)*: Matching supply with demand, Mc Graw-Hill, New York.

[2] *Chopra, S., Meindl, P. (2004)*: Supply Chain Management, 2. Auflage, Prentice Hall, New Jersey.

[3] *Dienst, H. - R. (1988)*: Mathematische Verfahren der Rückversicherung, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 19, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[4] *Farny, D. (1995)*: Versicherungsbetriebslehre, 2. Auflage, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[5] *Gerathewohl, K.(1976)*: Rückversicherung Grundlagen und Praxis, Band I, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[6] *Grossmann, M. (1990)*: Rückversicherung - eine Einführung, VW-Schriftenreihe, St. Gallen.

[7] *Jammernegg, W., Kischka, P. (2005)*: A Decision Rule Based on the Conditional Value at Risk, In: Jenaer Schriften zur Wirtschaftswissenschaft 09/2005.

[8] *Jammernegg, W., Kischka, P. (2007)*: Risk-averse and risk-taking newsvendors: a conditional expected value approach, In: Review of Managerial Science 1/2007.

[9] *Laux, H. (2003)*: Entscheidungstheorie, 5.Auflage, Springer-Verlag, Berlin.

[10] *Liebwein, P. (2000)*: Klassische und moderne Formen der Rückversicherung, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[11] *Liebwein, P. (2000a)*: Strukturierung von Rückversicherungsentscheidungen: Ein entscheidungstheoretisches Modell der Risikopolitik von Versicherungsunternehmen, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[12] *Mack, T. (1997)*: Schadenversicherungsmathematik, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[13] *Pfeiffer, C. (1986)*: Einführung in die Rückversicherung, 3. Auflage, Gabler, Wiesbaden.

[14] *Wagner, M. (2007)*: Bestimmung von Deckungsgrenzen bei nicht-proportionalen Rückversicherungsverträgen, in Vorbereitung.